EXERCICE N°1

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1} \qquad \forall x\neq -1$

1/a) Montrer que : $\forall\ x\neq -1\ :\ f(x)=x-1+\dfrac{1}{x+1}$; b) En déduire $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

2/a) Montrer que $\forall x\in IR$: $\dfrac{e^{2x}}{e^x+1}=e^x-\dfrac{e^x}{e^x+1}$; b) Calculer $J=\displaystyle\int_0^1 \dfrac{e^{2x}}{e^x+1}dx$

3/ Calculer à l'aide d'une intégration par partie : $K=\displaystyle\int_0^1 e^x\ln(e^x+1)\,dx$

EXERCICE N°2

Répondre par vraie ou faux

On considère une fonction f définie et dérivable sur IR.

1) On a $\int_{-1}^{3} -f(x)dx = \int_{3}^{-1} f(x)dx$

2) On a $\int_{-1}^{3} -f(x)dx = \int_{1}^{-3} f(x)dx$

3) Si $\int_0^1 f'(x)dx = 0$, alors f est constante sur [0 ; 1].

4) Si f est négative sur IR, alors, pour tout réel x, $\int_0^x f(t)dt \leq 0$

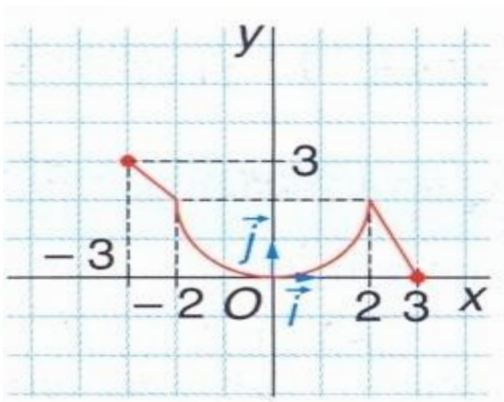
5) Si f est négative sur IR, alors la fonction, définie par : $x\mapsto \int_0^x f(t)dt$, décroit sur IR.

6) Si $\int_0^1 f'(x).f(x)dx = 0$, alors f(0) = f(1) ou f(0) = - f(1)

EXERCICE N°3

Soit f la fonction sur [-3 ; 3] et représentée ci-contre :

Sur [-2 ; 2], sa courbe représentative est un demi-cercle.



1) Calculer $\int_{-2}^{2} f(t)dt$ et $\int_{-3}^{3} f(t)dt$.

2) Soit g = – f. Calculer $\int_{-3}^{0} g(t)dt$.

3) soit h la fonction définie sur[-3 ; 3] par : h(x) = f(x) – 2

calculer $\int_{-3}^{3} h(x)dx$.

EXERCICE N°4

On pose $I_0=\displaystyle\int_0^1 e^{-2x}dx$ et pour $n\in\mathbb{N}^*, I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n e^{-2x}dx$

1/ Calculer I_0 et I_1

2/a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*\ \ I_{n+1}=\dfrac{1}{2}((n+1)I_n-e^{-2})$ et en déduire que $I_2=\dfrac{1}{4}(1-5e^{-2})$

b) Donner la valeur de $J=\displaystyle\int_0^1 (5x^2+x-3)e^{-2x}dx$

3/a) Montrer que $\forall x\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $0\leq x^n e^{-2x}\leq x^n$

b) Montrer que $0\leq I_n\leq \dfrac{1}{n+1}$ et déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

Exercice N°5

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

1/ En se servant de ce tableau répondre aux questions suivantes :

a) Donner la solution de l'équation $f(x)=0$

b) Dresser le tableau de signe de f(x) suivant les valeurs de x

c) Démontrer que pour tout $x>1, f(x)>1$

2/ On considère les intégrales suivantes : $I=\int_0^3 f(t)\,dt$, $J=\int_{-5}^{-2} f(t)\,dt$ et $K=\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$

a) Une seule de ces intégrales est positive. Laquelle ? Justifier votre réponse.

b) Une seule de ces intégrales est négative. Laquelle ? Justifier votre réponse.

3/ Donner un encadrement pour chacune des intégrales suivantes $A=\int_0^1 f(t)dt$ et $B=\int_1^2 f(t)dt$

4/ Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

a) Déterminer deux réels a et b tels que $a \le F(2) \le b$

b) Etudier la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$

c) Etudier le sens de variation de F

EXERCICE N°6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+1+e^{\frac{x}{2}}$

On désigne par ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$; (unité graphique 1 cm)

1/ Dresser le tableau de variation de f

2/a) Montrer que la droite D : y =x+1 est une asymptote à ζ_f au voisinage de $(-\infty)$

b) Etudier la position relative de ζ_f et D

3/a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{x}=+\infty$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; Interpréter graphiquement le résultat

4/ Tracer D et ζ_f

5/ Calculer l'aire de la région du plan limitée par ζ_f , la droite D et les droites d'équations x= - 1 et x = 2

6/ Soit $C=\{M(x,y) \text{ telque } y=f(x) \text{ et } 0\le x\le 1\}$

Calculer le volume du solide S obtenu par rotation de C autour de l'axe $(O,\vec{i})$